iseng ngerjain uas mtk 2023

the one and only @kafeyangasli

November 25, 2024

1.
$$\int \frac{e^x + e^{mx} - e^{5x} - n}{e^{2x}}\, dx$$

Selesaikan soal berikut dengan ketentuan nilai n sesuai dengan NIM dua digit terakhir (misal NIM: 24010114140094, maka nilai $n = 94$) dan nilai m sesuai dengan NIM satu digit terakhir (misal NIM: 24010114140094, maka nilai $m = 4$).

Pembahasan:

Menggunakan acuan di soal atas, maka persamaan akan menjadi:

$$\int \frac{e^x + e^{4x} - e^{5x} - 94}{e^{2x}}\, dx$$

Pertama-tama, kita pisah persamaan menjadi 4 bagian menggunakan salah satu sifat integral:

$$= \int \frac{e^x}{e^{2x}}\, dx + \int \frac{e^{4x}}{e^{2x}}\, dx - \int \frac{e^{5x}}{e^{2x}}\, dx - \int \frac{94}{e^{2x}}\, dx$$

Menggunakan sifat $\frac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$ dan $\int kf(x)\, dx = k \int f(x)\, dx$, persamaan dapat diubah menjadi:

$$= \int e^{x-2x}\, dx + \int e^{4x-2x}\, dx - \int e^{5x-2x}\, dx - 94 \int \frac{1}{e^{2x}}\, dx$$

$$= \int e^{-x}\, dx + \int e^{2x}\, dx - \int e^{3x}\, dx - 94 \int \frac{1}{e^{2x}}\, dx$$

Lalu, kita substitusikan u untuk:

- $u = 2x$; $du = 2dx \Leftrightarrow \frac{du}{2} = dx$
- $v = 3x$; $dv = 3dx \Leftrightarrow \frac{dv}{3} = dx$

Maka, persamaan akan menjadi:

$$= \int e^{-x}\, dx + \int e^u \frac{du}{2} - \int e^v \frac{dv}{3} - 94 \int \frac{1}{e^u} \frac{du}{2}$$

$$= \int e^{-x}\, dx + \frac{1}{2} \int e^u\, du - \frac{1}{3} \int e^v\, dv - \frac{94}{2} \int e^{-u}\, du$$

Selesaikan menggunakan sifat fungsi transeden:

$$= -e^{-x} + \frac{e^u}{2} - \frac{e^v}{3} + \frac{94e^{-u}}{2}$$

Substitusikan kembali u dan v:

$$= -e^{-x} + \frac{e^2x}{2} - \frac{e^3x}{3} + \frac{94e^{-2x}}{2}$$

Jangan lupa tambahkan konstanta!

Jawaban Akhir

$$= -e^{-x} + \frac{e^2x}{2} - \frac{e^3x}{3} + 47e^{-2x} + C$$

2.
$$\int \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}}\,dx$$

Pembahasan:

Ingat Kembali!

$$\begin{aligned}
&(1)\ \sqrt{a^2-x^2} \ \Rightarrow\ x = a\ \sin(t)\\
&(2)\ \sqrt{a^2+x^2} \ \Rightarrow\ x = a\ \tan(t)\\
&(3)\ \sqrt{x^2-a^2} \ \Rightarrow\ x = a\ \sec(t)
\end{aligned}$$

Sekilas, mungkin tampak bahwa persamaan soal tidak memuat salah satu dari ketiga sifat diatas. Namun, apabila kita telusuri lebih dalam, ternyata persamaan $\sqrt{9-x^2}$ dapat diubah menjadi $\sqrt{3^2-x^2}$. Sehingga, kita dapat menggunakan sifat (1):

$$\begin{aligned}
\sqrt{3^2-x^2} \Rightarrow &(1)\ \ x = 3\sin(t)\\
&(2)\ \ dx = 3\cos(t)dt
\end{aligned}$$

Lalu, kita substitusikan x dan dx:

$$= \int \frac{9\sin^2(t)}{\sqrt{9-9\sin^2(t)}}\,3\cos(t)dt$$

$$= \int \frac{9\sin^2(t)}{\sqrt{9(1-\sin^2(t))}}\,3\cos(t)dt$$

Menggunakan persamaan $\cos^2(x) = 1 - \sin^2(x)$:

$$= \int \frac{9\sin^2(t)}{\sqrt{9\cos^2(t)}}\,3\cos(t)dt$$

$$= \int \frac{9\sin^2(t)}{3\cos(t)} 3\cos(t) dt$$
$$= 9 \int \sin^2(t)\, dt$$

Kita substitusikan $\sin^2(t) = \frac{1-\cos(2t)}{2}$:

$$= 9 \int \frac{1-\cos(2t)}{2}\, dt$$
$$= \frac{9}{2} \int 1 - \cos(2t)\, dt$$

Lalu, pecah menjadi dua bagian:

$$= \frac{9}{2} \int 1\, dt - \frac{9}{2} \int \cos(2t)\, dt$$

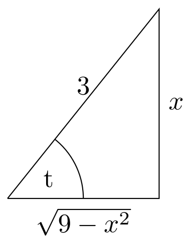
Untuk menyelesaikan integral dari $\cos(2t)$, kita dapat mensubstitusi $u = 2t$, sehingga $du = 2dt \Rightarrow \frac{du}{2} = dt$.

$$= \frac{9}{2} \int 1\, dt - \frac{9}{2} \int \cos(u) \frac{du}{2}$$
$$= \frac{9}{2} \int 1\, dt - \frac{9}{4} \int \cos(u)\, du$$
$$= \frac{9}{2} t - \frac{9}{4} \sin(u)$$

Masukkan kembali $u = 2t$:

$$= \frac{9}{2} t - \frac{9}{4} \sin(2t)$$

Untuk mengembalikan t menjadi x, kita dapat menggunakan permisalan kita pada awal pengerjaan, yakni $x = 3\sin t$. Maka, didapatkan:



$$x = 3\sin(t)$$
$$\frac{x}{3} = \sin(t)$$
$$\arcsin\left(\frac{x}{3}\right) = t$$

$$\sin(2t) = 2\sin(t)\cos(t)$$
$$= 2\frac{x}{3}\frac{\sqrt{9-x^2}}{3}$$
$$= \frac{2x\sqrt{9-x^2}}{9}$$

$$= \frac{9}{2} \arcsin\left(\frac{x}{3}\right) - \frac{9}{4} \times \frac{2x\sqrt{9-x^2}}{9}$$
$$= \frac{9}{2} \arcsin\left(\frac{x}{3}\right) - \frac{2x\sqrt{9-x^2}}{4} \times \frac{9}{9}$$

Jawaban Akhir

$$= \frac{9\arcsin(\frac{x}{3}) - x\sqrt{9-x^2}}{2} + C$$

3.

$$\int \frac{4x - m}{x^3 - 8x^2 + 20x - 16}\, dx$$

Selesaikan soal berikut dengan mengganti nilai m sesuai dengan NIM satu digit terakhir (misal NIM: 24010114140090, maka nilai $m = 0$).

Pembahasan:

Untuk mempersulit keadaan, maka anggap saja $m = 3$. Sehingga, persamaan akan menjadi:

$$\int \frac{4x - 3}{x^3 - 8x^2 + 20x - 16}\, dx$$

$$\begin{aligned}
\frac{4x-3}{x^3 - 8x^2 + 20x - 16} &= \frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x-2)^2} + \frac{C}{x-4} \\
&= \frac{A(x-2)(x-4) + B(x-4) + C(x-2)^2}{(x-2)^2(x-4)} \\
&= \frac{Ax^2 - 6Ax + 8A + Bx - 4B + Cx^2 - 4Cx + 4C}{(x-2)^2(x-4)} \\
4x - 3 &= (A+C)x^2 + (-6A + B - 4C)x + (8A - 4B + 4C)
\end{aligned}$$

Didapatkan:

$$\begin{aligned}
0 &= A + C \\
-C &= A \\
-\frac{13}{4} &= A
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
4 &= -6A + B - 4C \\
4 &= 6C + B - 4C \\
4 &= 2C + B ...(1) \\
4 &= 2C - \frac{5}{2} \\
4 + \frac{5}{2} &= 2C \\
\frac{13}{4} &= C
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
-3 &= 8A - 4B + 4C \\
-3 &= -8C - 4B + 4C \\
& \textit{Eliminasi } C: \\
-3 &= -4C - 4B \\
8 &= 4C + 2B \\
& \overline{\qquad\qquad} + \\
5 &= -2B \\
-\frac{5}{2} &= B
\end{aligned}$$

Setelah mendapatkan A, B, dan C, maka persamaan integral akan berubah:

$$= -\frac{13}{4}\int \frac{1}{x-2}\, dx - \frac{5}{2}\int \frac{1}{(x-2)^2}\, dx + \frac{13}{4}\int \frac{1}{x-4}\, dx$$

Lalu, kita substitusikan $u = x - 2 \rightarrow du = dx$ dan $v = x - 4 \rightarrow dv = dx$:

$$= -\frac{13}{4}\int \frac{1}{u}\, du - \frac{5}{2}\int \frac{1}{u^2}\, du + \frac{13}{4}\int \frac{1}{v}\, dv$$

$$= -\frac{13\ln(u)}{4} + \frac{5}{2u} + \frac{13\ln(v)}{4}$$

Masukkan kembali u dan v:

$$= -\frac{13\ln(x-2)}{4} + \frac{5}{2(x-2)} + \frac{13\ln(x-4)}{4}$$

Jangan lupa tambahkan konstanta!

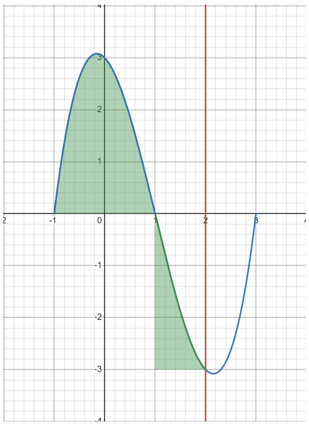
Jawaban Akhir

$$= -\frac{13\ln(x-2)}{4} + \frac{5}{2x-4} + \frac{13\ln(x-4)}{4} + C$$

4. Tentukan luas daerah R yang dibatasi oleh $y = x^3 - 3x^2 - x + 3$, ruas sumbu x antara $x = -1$ dan $x = 2$, dan oleh garis $x = 2$.

   Pembahasan:

   Berdasarkan spesifikasi diatas, maka grafik sekiranya akan tampak sebagai berikut:



   Karena terdapat kondisi dimana kurva berada diatas dan dibawah, maka persamaan mencari luas daerah akan menjadi:

$$\int_{-1}^{1} x^3 - 3x^2 - x + 3\,dx - \int_{1}^{2} x^3 - 3x^2 - x + 3\,dx$$

$$= \left(\frac{x^4}{4} - x^3 - \frac{x^2}{2} + 3x\right)|_{-1}^{1} - \left(\frac{x^4}{4} - x^3 - \frac{x^2}{2} + 3x\right)|_{1}^{2}$$

   Untuk mempermudah keadaan, kita misalkan integral atas $R1$ dan bawah $R2$:

   - $R1$

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{(1)^4}{4} - (1)^3 - \frac{(1)^2}{2} + 3(1)\right) - \left(\frac{(-1)^4}{4} - (-1)^3 - \frac{(-1)^2}{2} + 3(-1)\right) \\
&= \left(\frac{1}{4} - 1 - \frac{1}{2} + 3\right) - \left(\frac{1}{4} + 1 - \frac{1}{2} - 3\right) \\
&= \left(\frac{1-4-2+12}{4}\right) - \left(\frac{1+4-2-12}{4}\right) \\
&= \left(\frac{7}{4}\right) - \left(-\frac{9}{4}\right) \\
&= \frac{16}{4} \leftrightarrow = 4
\end{aligned}$$

- $R2$

$$= \left(\frac{(2)^4}{4} - (2)^3 - \frac{(2)^2}{2} + 3(2)\right) - \left(\frac{(1)^4}{4} - (1)^3 - \frac{(1)^2}{2} + 3(1)\right)$$

$$= \left(\frac{16}{4} - 8 - \frac{4}{2} + 6\right) - \left(\frac{1}{4} - 1 - \frac{1}{2} + 3\right)$$

$$= (4 - 8 - 2 + 6) - \left(\frac{7}{4}\right)$$

$$= (0) - \left(\frac{7}{4}\right)$$

$$= -\frac{7}{4}$$

Lalu, kita masukkan $R1$ dan $R2$ kembali:

$$= R1 - R2$$

$$= 4 - (-\frac{7}{4})$$

$$= 4 + \frac{7}{4}$$

$$= \frac{16+7}{4}$$

Jawaban Akhir

$$= \frac{23}{4} satuan\ luas$$

DISCLAIMER

Pembahasan ini disusun oleh seorang amatir. Bilamana terdapat kesalahan kalkulasi, mohon pemakluman serta pengoreksiannya. Terimakasih.