sesatmaxxing

metode numerik

the one and only

kafeyangasli

1/4/25

pembahasan UTS metode numerik 23/24

edisi sesatmaxxing vol. 1

the one and only @kafeyangasli

April 1, 2025

Diberikan data sebagai berikut:

x	2.00	2.10	2.20	2.30	2.40	2.50
y	11.028	13.537	16.308	19.344	22.656	26.257

1. Uraikan interpolasi polinomial dengan menerapkan metode interpolasi polinomial Lagrange $y \approx P_2(x)$ (dalam 5 angka bena)!

   Pembahasan:

   Karena terdapat 6 buah data x_i, y_i, maka seharusnya kita akan melakukan interpolasi Lagrange sebanyak 6 kali. Namun, karena yang diminta soal adalah $y \approx P_2(x)$, maka kita cukup mencari sampai suku ketiga dari polinomial Lagrange. Formula untuk interpolasi polinomial Lagrange derajat 2 adalah:

   $$p_2(x) = \sum_{j=0}^{2} a_j L_j(x)$$

   dengan $a_j L_j(x)$:

   $$a_j L_j(x) = y_j \prod_{k=0;k\neq j}^{5} \frac{x - x_k}{x_j - x_k}$$

   Untuk mempermudah visualisasi proses, maka kita akan mencari setiap suku secara bertahap, dimulai dari $j = 0$.

   $$\begin{aligned}
   a_0L_0(x) &= y_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)(x-x_5)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)(x_0-x_4)(x_0-x_5)} \\
   &= 11,028 \frac{(x-2.10)(x-2.20)(x-2.30)(x-2.40)(x-2.50)}{(2.00-2.10)(2.00-2.20)(2.00-2.30)(2.00-2.40)(2.00-2.50)} \\
   &= 11,028 \frac{(x-2.10)(x-2.20)(x-2.30)(x-2.40)(x-2.50)}{(-0.10)(-0.20)(-0.30)(-0.40)(-0.50)} \\
   &= -11,028 \frac{(x-2.10)(x-2.20)(x-2.30)(x-2.40)(x-2.50)}{(0.0012)} \\
   a_1L_1(x) &= y_2 \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)(x-x_5)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)(x_1-x_5)} \\
   &= 13,537 \frac{(x-2.00)(x-2.20)(x-2.30)(x-2.40)(x-2.50)}{(2.10-2.00)(2.10-2.20)(2.10-2.30)(2.10-2.40)(2.10-2.50)} \\
   &= 13,537 \frac{(x-2.00)(x-2.20)(x-2.30)(x-2.40)(x-2.50)}{(0.10)(-0.10)(-0.20)(-0.30)(-0.40)} \\
   &= -13,537 \frac{(x-2.00)(x-2.20)(x-2.30)(x-2.40)(x-2.50)}{(0.0024)} \\
   a_2L_2(x) &= y_3 \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)(x-x_4)(x-x_5)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)(x_2-x_4)(x_2-x_5)} \\
   &= 16,308 \frac{(x-2.00)(x-2.10)(x-2.30)(x-2.40)(x-2.50)}{(2.20-2.00)(2.20-2.10)(2.20-2.30)(2.20-2.40)(2.20-2.50)} \\
   &= 16,308 \frac{(x-2.00)(x-2.10)(x-2.30)(x-2.40)(x-2.50)}{(0.20)(0.10)(-0.10)(-0.20)(-0.30)} \\
   &= -16,308 \frac{(x-2.00)(x-2.10)(x-2.30)(x-2.40)(x-2.50)}{(0.006)}
   \end{aligned}$$

Tampak sangat panjang, bukan? Apabila kita mencoba untuk substitusi suku yang sudah kita dapatkan ke dalam formula polinomial Lagrange, tentunya akan cukup sulit, terutama pada pembilang $L_j(x)$ yang panjang. Oleh karena itu, saya akan memisalkan $x - x_j$ tersebut menjadi h, sebagai berikut:

$$h_1 = (x-2.00), \quad h_2 = (x-2.10), \quad h_3 = (x-2.20),$$
$$h_4 = (x-2.30), \quad h_5 = (x-2.40), \quad h_6 = (x-2.50)$$

Sehingga, persamaan untuk setiap suku kita dapatkan menjadi:

$$a_0L_0(x) = -11,028\frac{h_2\ h_3\ h_4\ h_5\ h_6}{(0.0012)}, a_1L_1(x) \quad = -13,537\frac{h_1\ h_3\ h_4\ h_5\ h_6}{(0.0024)}$$
$$a_2L_2(x) = -16,308\frac{h_1\ h_2\ h_4\ h_5\ h_6}{(0.006)}$$

Tampak lebih singkat! Sekarang, substitusi suku-suku tersebut ke dalam formula polinomial Lagrange:

$$\begin{aligned}
p_2(x) &= \sum_{j=1}^{2} a_jL_j(x) \\
&= a_0L_0(x) + a_1L_1(x) + a_2L_2(x) \\
&= -11,028\frac{h_2\ h_3\ h_4\ h_5\ h_6}{(0.0012)} - 13,537\frac{h_1\ h_3\ h_4\ h_5\ h_6}{(0.0024)} - 16,308\frac{h_1\ h_2\ h_4\ h_5\ h_6}{(0.006)}
\end{aligned}$$

2. Uraikan taksiran nilai x dengan menerapkan metode interpolasi polinomial Newton derajat 2 untuk $x = 2,05$!

Pembahasan:

Terdapat tiga metode Newton yang dapat kita gunakan: Newton Selisih Bagi, Newton-Gregory Maju, atau Newton-Gregory Mundur. Jika kita perhatikan data x_i, dapat dilihat bahwa jarak antar data adalah sama, yakni $h = 0.10$. Sehingga, kita dapat menggunakan metode Newton-Gregory Maju/Mundur untuk mempersingkat waktu secepat mungkin. Untuk pembahasan ini, saya akan menggunakan metode Newton-Gregory Maju.

Langkah pertama adalah membuat tabel selisih maju seperti berikut:

x	f(x)	Δ	Δ^2
2.00	11.028	2.509	0.262
2.10	13.537	2.771	0.265
2.20	16.308	3.036	0.276
2.30	19.344	3.312	0.289
2.40	22.656	3.601	
2.50	26.257		

Lalu memasukkan nilai x yang akan diinterpolasikan:

$$\begin{aligned}
x &= x_0 + sh \\
2.05 &= 2 + s(0.1) \\
0.05 &= s(0.1) \\
\frac{0.05}{0.1} &= s \\
s &= 0.5
\end{aligned}$$

Untuk menghampiri nilai $f(2.05)$ dengan metode Newton-Gregory Maju derajat 2, dibutuhkan tiga titik. Dan karena galat interpolasi akan minimum jika x berada di tengah-tengah selang, maka selang yang akan kita gunakan adalah [2.00, 2.20] dan titik-titik x:

$$x_0 = 2.00, \quad x_1 = 2.10, \quad x_2 = 2.20$$

Sehingga, didapatkan:

$$\begin{aligned}
p_2(x) &\approx f_0 + \frac{s}{1!}\Delta f_0 + \frac{s(s-1)}{2!}\Delta^2 f_0 \\
&\approx 11.028 + (0.5)(2.509) + \frac{0.5(-0.5)}{2}(0.262) \\
&\approx 11.028 + 1.2545 - \frac{(0.25)}{2}(0.262) \\
&\approx 11.028 + 1.2545 - 0.03275 \\
&\approx 12.24975
\end{aligned}$$

3. Uraikan taksiran turunan pertama $f'(x)$ untuk $x = 2,40$ dengan menerapkan metode *backward differentiation approximation* pada $O(h^2)$!

Pembahasan:

Rumus untuk metode *backward differentiation approximation* sampai $O(h^2)$ atau dengan tiga titik dapat diuraikan sebagai berikut:

$$f'(x) = \frac{3f(x) - 4f(x-h) + f(x-2h)}{2h}$$

Yang dimana $f(x) = 2.40$, $f(x-h) = 2.30$, dan $f(x-2h) = 2.20$. (karena beda antar data atau h adalah 0.10)

Sehingga, didapatkan:

$$\begin{aligned} f'(x)_{bda} &= \frac{3f(x) - 4f(x-h) + f(x-2h)}{2h} \\ f'(2.40)_{bda} &= \frac{3 \cdot (22.656) - 4 \cdot (19.344) + (16.308)}{2 \cdot (0.10)} \\ &= \frac{67.968 - 77.376 + 16.308}{0.20} \\ &= 34.5 \end{aligned}$$

4. Uraikan galat relatif absolut pada soal nomor (2) dan (3) dengan tingkat signifikansinya 0,0001 dengan asumsi bahwa $f(x) = e^{-2x} + 2x^3 - 5$!

Pembahasan:

Untuk nomor (2), nilai eksaknya adalah:

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{-2x} + 2x^3 - 5 \\ f(2.05) &= e^{-2(2.05)} + 2(2.05)^3 - 5 \\ &= 0.01657 + 17.23025 - 5 \\ &= 12.24682 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$

Didapatkan galat relatifnya:

$$\begin{aligned} \varepsilon_R &= |\frac{f(x) - p_2(x)}{f(x)}| \\ &= |\frac{12.24682 - 12.24975}{12.24682}| \\ &= 0.00023 \approx 0.023\% \end{aligned}$$

Untuk nomor (3), nilai eksaknya adalah:

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{-2x} + 2x^3 - 5 \\ f'(x) &= -2e^{-2x} + 6x^2 \\ f'(2.40) &= -2e^{-2(2.40)} + 6(2.40)^2 \\ &= -0.01645 + 34.56 \\ &= 34.54354 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$

Didapatkan galat relatifnya:

$$\begin{aligned} \varepsilon_R &= |\frac{f'(x) - f'(x)_{bda}}{f'(x)}| \\ &= |\frac{34.54354 - 34.5}{34.54354}| \\ &= 0.01260 \approx 1.26\% \end{aligned}$$

5. Uraikan perhitungan

$$f(x) = \int_1^{2.2} e^x \, dx$$

untuk mendapatkan nilai aproksimasi.

Nilai asli dari integral di atas adalah $I_{asli} = 6.306731671$.

- Aturan Trapesium, $h = 0.2$, dan hitung galat relatif absolutnya!

  Pembahasan:

  Metode Pias dengan Aturan Trapeisum didefinisikan sebagai

  $$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\, dx = \frac{h}{2}[f(x_0) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n)]$$

  Diketahui $h = 0.2$, sehingga banyaknya n:

  $$\begin{aligned} h &= \frac{x_1 - x_0}{n} \\ 0.2 &= \frac{1.2}{n} \\ n &= \frac{1.2}{0.2} \\ n &= 6 \end{aligned}$$

Maka, didapatkan:

$$\int_{1}^{2.2} e^x\,dx \approx \frac{h}{2}\cdot[f(x_0)+f(x_6)]+\frac{h}{2}\cdot[2\sum_{i=1}^{5} f(x_i)]$$

Dengan bantuan Excel:

h	0.2		x0	1		f(x0)	2.718282
x_0	1		x1	1.2		2 f(x1)	6.640234
x_1	2.2		x2	1.4		2 f(x2)	8.1104
n	6		x3	1.6		2 f(x3)	9.906065
			x4	1.8		2 f(x4)	12.09929
			x5	2		2 f(x5)	14.77811
			x6	2.2		f(x6)	9.025013
						sigma	63.2774
						integral	6.32774

didapatkan $I_{approx} \approx 6.327740108$
Maka, galat relatifnya:

$$\begin{aligned}\varepsilon_R &= |\frac{I_{asli}-I_{approx}}{I_{asli}}| \\ &= |\frac{6.306731671-6.327740108}{6.306731671}| \\ &= 0.0033 \approx 0.33\%\end{aligned}$$

- Aturan Simpson 1/3, $h=0.2$, dan hitung galat relatif absolutnya!
  <u>**Pembahasan:**</u>
  Metode Newton-Cotes dengan Aturan Simpson 1/3 didefinisikan sebagai

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx = \frac{h}{3}[f(x_0)+4f(x_0+h)+f(x_0+2h)]$$

dan gabungannya:

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx = \frac{h}{3}[f(x_0)+\sum_{i=ganjil}^{n-1} 4f(x_i)+\sum_{i=genap}^{n-2} 2f(x_i)+f(x_n)]$$

Diketahui $h=0.2$, sehingga banyaknya n:

$$\begin{aligned}h &= \frac{x_1-x_0}{n} \\ 0.2 &= \frac{1.2}{n} \\ n &= \frac{1.2}{0.2} \\ n &= 6\end{aligned}$$

Maka, didapatkan:

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}[f(x_0)+\sum_{i=1,3,5}^{5} 4f(x_i)+\sum_{i=2,4}^{4} 2f(x_i)+f(x_6)]$$

Dengan bantuan Excel:

h	0.2		x0	1		f(x0)	2.718282
x_0	1		x1	1.2		4(x1)	13.28047
x_1	2.2		x2	1.4		2(x2)	8.1104
n	6		x3	1.6		4(x3)	19.81213
			x4	1.8		2(x4)	12.09929
			x5	2		4(x5)	29.55622
			x6	2.2		f(x6)	9.025013
						sigma	94.60181
						integral	6.306787

didapatkan $I_{approx} \approx 6.306787465$
Maka, galat relatifnya:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_R &= |\frac{I_{asli} - I_{approx}}{I_{asli}}| \\
&= |\frac{6.306731671 - 6.306787465}{6.306731671}| \\
&= -8.84674 \cdot 10^{-6} \approx 0.00088\%
\end{aligned}$$

- Manakah yang memberikan akurasi lebih baik?
  Pembahasan:
  Sudah jelas Aturan Simpson 1/3.
  (pembahasan lebih serius menyusul)