sesatmaxxing

matematika ii

the one and only

kafeyangasli

3/4/25

pembahasan UTS matematika II 24/25

edisi sesatmaxxing vol. 1

the one and only @kafeyangasli

April 3, 2025

1. Diketahui sebuah kotak ABC dengan panjang x satuan, y satuan, dan z satuan mempunyai volume 125. Dengan menggunakan metode Lagrange, tentukan ukuran kotak tersebut agar luas permukaannya maksimum!

   Pembahasan:

   Diketahui kotak kita memiliki volume 125 satuan. Kita diminta untuk dicari berapa ukuran dari kotak tersebut agar luas permukaannya maksimum.

   Dari kedua poin di atas, maka bisa disimpulkan bahwa kita diminta untuk mencari nilai maksimum dari fungsi $f(x) = 2xy + 2yz + 2xz$ dengan fungsi batasan $g(x) = xyz - 125$.

   Menggunakan metode Lagrange, maka didapatkan fungsi $L(x, y, z, \lambda)$:

$$\begin{aligned} L(x,y,z,\lambda) &= f(x,y,z) - \lambda(g(x,y,z)) \\ &= 2xy + 2yz + xz - \lambda(xyz - 125) \end{aligned}$$

   Agar maksimum, maka perlulah:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0 \quad \frac{\partial L}{\partial y} = 0 \quad \frac{\partial L}{\partial z} = 0 \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0$$

   Maka, didapatkan:

   - Turunan parsial L terhadap x:

$$\begin{aligned} L &= 2xy + 2yz + 2xz - \lambda(xyz - 125) \\ \frac{\partial L}{\partial x} &= 2y + 2z - \lambda yz \\ 0 &= 2y + 2z - \lambda yz \ldots (1) \end{aligned}$$

   - Turunan parsial L terhadap y:

$$\begin{aligned} L &= 2xy + 2yz + 2xz - \lambda(xyz - 125) \\ \frac{\partial L}{\partial y} &= 2x + 2z - \lambda xz \\ 0 &= 2x + 2z - \lambda xz \ldots (2) \end{aligned}$$

   - Turunan parsial L terhadap z:

$$\begin{aligned} L &= 2xy + 2yz + 2xz - \lambda(xyz - 125) \\ \frac{\partial L}{\partial z} &= 2y + 2x - \lambda xy \\ 0 &= 2y + 2x - \lambda xy \ldots (3) \end{aligned}$$

   - Turunan parsial L terhadap λ:

$$\begin{aligned} L &= 2xy + 2yz + xz - \lambda(xyz - 125) \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} &= -xyz + 125 \\ 0 &= -xyz + 125 \ldots (4) \end{aligned}$$

   Untuk menentukan nilai maksimum dari x, y, dan z, kita perlu mencari pelipat Lagrangenya terlebih dahulu (λ).

   Ada banyak cara untuk mendapatkan λ. Salah satunya adalah menggunakan turunan parsial L terhadap λ dengan mensubstitusikan variabel xy, xz, atau yz dari turunan parsial yang sudah diketahui. Pilih salah keduanya, misal xy dan yz.

   - xy

$$\begin{aligned} 0 &= 2y + 2x - \lambda xy \\ \lambda xy &= 2y + 2x \\ \lambda &= \frac{2y + 2x}{xy} \end{aligned}$$

   - yz

$$\begin{aligned} 0 &= 2y + 2z - \lambda yz \\ \lambda yz &= 2y + 2z \\ \lambda &= \frac{2y + 2z}{yz} \end{aligned}$$

Karena sama-sama λ, maka bisa kita sampingkan kedua persamaan:

$$\begin{aligned}
\frac{2y+2x}{xy} &= \frac{2y+2z}{yz} \\
\frac{\cancel{2}(y+x)}{\cancel{2}(y+z)} &= \frac{x\cancel{y}}{\cancel{y}z} \\
\frac{y+x}{y+z} &= \frac{x}{z} \\
(y+x)(z) &= x(y+z) \\
xy+yz &= xy+xz \\
yz &= xy-xy+xz \\
y\cancel{z} &= x\cancel{z} \\
y &= z
\end{aligned}$$

Didapatkan $y = z$. Maka, kita bisa menggunakan persamaan sebelumnya untuk mencari nilai x:

$$\begin{aligned}
xy+yz &= xy+xz \\
xy+y^2 &= xy+xy \\
y(x+y) &= 2xy \\
x+y &= 2x \\
y &= x
\end{aligned}$$

Ternyata, $x = y$! Maka, didapatkan $x = y = z$. Jika kita substitusikan ke persamaan (4):

$$\begin{aligned}
0 &= -xyz+125 \\
xyz &= 125 \\
x^3 &= 125 \\
x &= \sqrt[3]{125} \\
x &= 5;
\end{aligned}$$

Karena $x = y = z$, jelas bahwa $y = 5$ dan $z = 5$. Ternyata, tidak diperlukan mencari λ!

Sehingga, ukuran maksimum kotak agar luas permukaannya maksimum adalah 5x5x5.

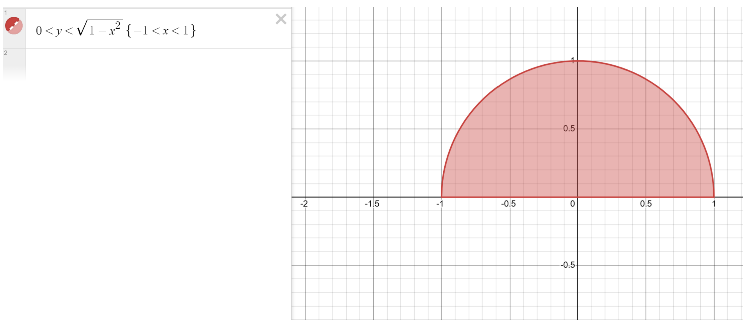
2. Diketahui daerah yang dibatasi $0 \leq r \leq 1$ dan $0 \leq \theta \leq \pi$. Tentukan daerah tersebut dalam koordinat Kartesian.

   Pembahasan: *(mohon koreksinya bilamana terdapat kesalahan konsep)

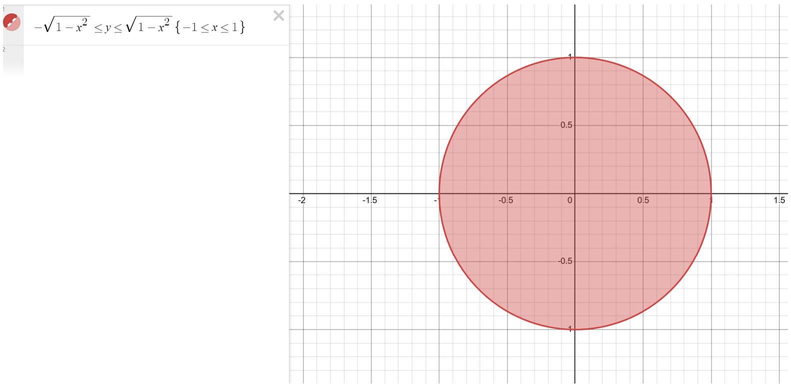
   Dalam sistem koordinat Polar, r diartikan sebagai jarak dari titik pusat ke titik fungsi. Sedangkan θ diartikan sebagai banyaknya perputaran yang dilakukan.

   Apabila kita mentranslasikan ke dalam sistem koordinat Kartesian, maka kita dapatkan bahwa fungsi tersebut memiliki batasan x dari -1 sampai 1, sedangkan untuk batasan y dimulai dari 0 sampai $\sqrt{1-x^2}$.

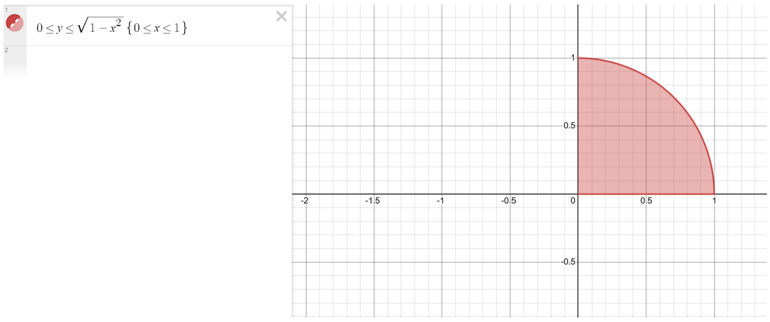
   Mengapa $-1 \leq x \leq 1$? Menggunakan konsep bahwa r merupakan jarak dari titik pusat ke titik fungsi serta diketahui bahwa θ dibatasi dari 0 sampai π yang dimana berarti fungsi diputar sampai hanya diatas sumbu y, maka x juga pula menjalar ke -1. Amati gambar dibawah ini!



Jika θ memiliki batasan dari 0 sampai 2π, artinya ia diputar setengah lingkaran dua kali atau sama saja sebagai satu lingkaran penuh. Sehingga, batasan x tetap sedangkan y berubah menjadi $-\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2}$ karena kita juga mencari luas yang berada di bawah sumbu y. Amati gambar dibawah ini!



Jika θ memiliki batasan dari 0 sampai $\frac{\pi}{2}$, artinya ia diputar seperempat lingkaran. Sehingga, batasan x berubah menjadi $0 \leq x \leq 1$ sedangkan batasan y tetap karena fungsi kita berada hanya diatas sumbu y.



3. Jika $f(r,\theta) = r^2 \sin(\theta)\cos(\theta)$, tentukan bentuk $f(x,y)$ dalam sistem koordinat Kartesian.

   Pembahasan:

   Untuk mentranslasi fungsi dari sistem koordinat Polar ke Kartesian ataupun sebaliknya, kita bisa menggunakan:
   $$x = r\cos(\theta) \quad y = r\sin(\theta) \quad x^2 + y^2 = r^2$$

   Diketahui fungsinya
   $$f(r,\theta) = r^2 \sin(\theta)\cos(\theta)$$

   Apakah ada yang sama dengan salah satu persamaan di atas? Atau bahkan dua?

   Jika kita pisah r^2:
   $$f(r,\theta) = r \cdot \sin(\theta) r \cdot \cos(\theta)$$

   Ternyata, ada! Yakni $x = r\cos(\theta)$ dan $y = r\sin(\theta)$. Sehingga, bentuk dari fungsi $f(r,\theta)$ dalam $f(x,y)$ adalah:

   $$f(x,y) = x \cdot y$$

4. Gunakan sistem koordinat Kartesian untuk menyelesaikan integral ganda berikut
   $$\int_0^{\pi} \int_0^{1} r^3 \sin(\theta)\cos(\theta)\, dr\, d\theta$$

   Pembahasan:

   Menggunakan sistem koordinat Kartesian, maka batasan:
   $$0 \leq r \leq 1 \quad 0 \leq \theta \leq \pi$$

ditranslasikan menjadi:

$$-1 \leq x \leq 1 \quad 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2}$$

Untuk fungsi $f(r,\theta)$, kita akan memisah r^3:

$$f(r,\theta) = r \cdot \sin(\theta) r \cdot \cos(\theta) r$$

Lalu mensubstitusikan kedua translasi Polar ke Kartesian di nomor 3. Untuk kelebihan r di belakang, kita bisa mensubstitusikan $r = \sqrt{x^2+y^2}$. Sehingga, integral $f(x,y)$ yang baru menjadi:

$$I = \int_{-1}^{1} \int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} x \cdot y \cdot \sqrt{x^2+y^2}\, dy\, dx$$

Mammamia! Saatnya menyelesaikan!

$$\begin{aligned} I &= \int_{-1}^{1} \int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} x \cdot y \cdot \sqrt{x^2+y^2}\, dy\, dx \\ &= \int_{-1}^{1} x \cdot \int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} y \cdot \sqrt{x^2+y^2}\, dy\, dx \end{aligned}$$

Kita selesaikan integral dalamnya:

$$I_y = \int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} y \cdot \sqrt{x^2+y^2}\, dy$$

Substitusi u:

$$\begin{aligned} u &= \sqrt{x^2+y^2} \\ u^2 &= x^2+y^2 \\ 2u\, du &= 2y\, dy \\ u\, du &= y\, dy \end{aligned}$$

Karena ini adalah integral tentu, ketika kita menggunakan metode substitusi, haruslah juga kita mengganti batasan integralnya. Maka,

- Ketika $y = 0 \rightarrow u = \sqrt{x^2}$
- Ketika $y = \sqrt{1-x^2} \rightarrow u = \sqrt{1-(1-x^2)} = |x|$

Maka, integral dalam yang baru:

$$\begin{aligned} I_y &= \int_{|x|}^{1} u^2\, du \\ &= \frac{u^3}{3} |_{|x|}^{1} \\ &= (\frac{1}{3}) - (\frac{(|x|)^3}{3}) \\ &= \frac{1-|x|^3}{3} \end{aligned}$$

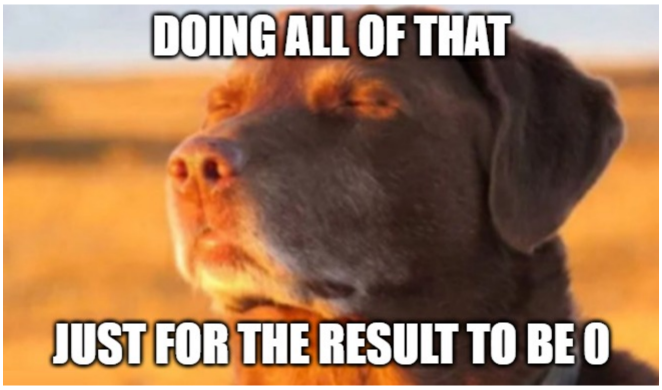
Kita substitusikan hasil integral dalam ke integral luar:

$$\begin{aligned} I &= \int_{-1}^{1} x \cdot (I_y)\, dx \\ &= \int_{-1}^{1} x \cdot \frac{1-|x|^3}{3}\, dx \\ &= \frac{1}{3} \int_{-1}^{1} x \cdot (1-|x|^3)\, dx \\ &= \frac{1}{3} \int_{-1}^{1} x - x|x|^3\, dx \\ &= \frac{1}{3} \left[\int_{-1}^{1} x\, dx - \int_{-1}^{1} x|x|^3\, dx \right] \end{aligned}$$

Karena terdapat fungsi mutlak dan juga melibatkan salah satu sisi daerahnya dibelakang sumbu x (negatif), maka fungsi yang kanan akan dipisah menjadi dua:

$$\begin{aligned}
I &= \frac{1}{3}\left[\int_{-1}^{1} x\,dx - \left[\int_{-1}^{0} x(-x)^3\,dx + \int_{0}^{1} x(x)^3\,dx\right]\right] \\
&= \frac{1}{3}\left[\int_{-1}^{1} x\,dx - \left[-\int_{-1}^{0} x^4\,dx + \int_{0}^{1} x^4\,dx\right]\right] \\
&= \frac{1}{3}\left[\frac{x^2}{2}|_{-1}^{1} - \left[-\left(\frac{x^5}{5}|_{-1}^{0}\right)dx + \frac{x^5}{5}|_{0}^{1}\right]\right] \\
&= \frac{1}{3}\left[0 - \left[-\left(\frac{1}{5}\right) + \frac{1}{5}\right]\right] \\
&= \frac{1}{3}(0) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Sehingga, jawabannya adalah.... 0?



*(jika salah mohon koreksinya segera dan kemaklumannya karena saya sudah mendekati titik *crashout*)